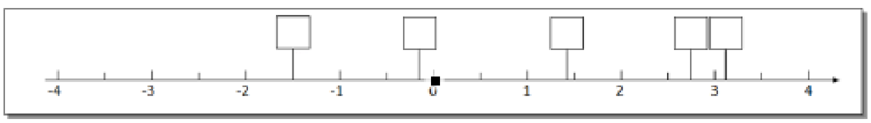
Prática

Exercício para “início de conversa” –
Localize na reta numérica abaixo os pontos P correspondentes aos segmentos de reta OP cujas medidas são os números reais representados por:

$\sqrt{2}$ $\quad\quad$ $\frac{11}{4}$ $\quad\quad$ $3{,}1$ $\quad\quad$ $-\frac{1}{5}$ $\quad\quad$ $-\frac{3}{2}$



Exercícios didáticos (I)

Exercício 1-
Aponte ao menos um erro em cada frase a seguir.
a).- Números irracionais são os números que não são números racionais.
b).- Números irracionais são os números que não podem ser escritos como o quociente de números inteiros.
c).- Números decimais são os números reais que podem ser representados por uma fração cujo numerador é um inteiro e o denominador é uma potência de 10.
d).- Números decimais são os números reais que podem ser representados por uma fração.
e).- Denomina-se fração decimal ou número decimal a toda fração cujo denominador é potência de 10.
f).- Denomina-se fração decimal ou número decimal a toda fração ordinária cujo denominador é potência positiva de 10.
g).- Podemos dividir os números racionais em dois tipos disjuntos: os racionais inteiros (são os representados por números inteiros) e os racionais fracionários (são os representados por uma fração ordinária de denominador distinto de 1).

Exercício 2-
Diga, justificando, se V. ou F.:
a).- todo número decimal é número racional.
b).- todo número racional é número decimal.
c).- 21,36 e 21,37 são dois números racionais consecutivos.
Resp.:
V, F, F.

Exercício 3-
Justificando, diga quais entre os números representados abaixo é número decimal:
-12/5 $\quad$ 22/7 $\quad$ 13/52 $\quad$ 3,1400 $\quad$ 9/125 $\quad$ 2/3 $\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad$ 12/11 $\quad$ 2/2

Exercício 4-
*Podemos dividir os **números reais** em três tipos: os racionais inteiros (são os representados por números inteiros), os racionais fracionários (são os demais racionais, ou seja: são os representados por uma fração irredutível de denominador distinto de 1) e os irracionais. Usando essa terminologia, pede-se classificar os números reais dados pelas representações abaixo:*
a). 0,9999....   b). 5/2   c). 2,909009000900009....

Exercícios didáticos (II)

> Observação -
> Entre quaisquer dois números racionais, existe um racional estritamente entre eles: sua *média aritmética*. Semelhantemente, entre quaisquer dois números reais, existe um real estritamente entre eles: sua média aritmética.

Exercício 1-
Sejam os números racionais representados pelas frações 29/55 e 39/75.
a).- Esses dois números são números decimais?
b).- Qual o maior desses números?
c).- Achar um número decimal estritamente entre esses dois números.
d).- Achar um número racional que não seja decimal e que esteja estritamente entre esses dois números. (DICA: um caminho seria pensar na média aritmética, mas isso envolve mostrar que esta média não será número decimal.)
e).- Achar um número irracional que não seja decimal e que esteja estritamente entre esses dois números. (DICA: agora, a média não serve. Alternativa: use representações decimal.)

Exercício 2-
É possível encaixar infinitos números decimais entre 0,4 e 0,5 ? Se for possível, construa; se não for, justifique.

Exercício 3-
Existe um número decimal estritamente entre 0 e 1 e que esteja o mais próximo possível de 1?

Exercício 4-
Por que não pode existir nenhum número real entre 1 e 0,9999... ? Por que isso não contradiz a observação acima?

Exercícios didáticos (III)

Exercício 1-
"Os números irracionais são os reais cuja representação com vírgula não tem representação decimal finita e nem periódica (simples ou composta)." Verdade ou falso? Justifique.

Exercício 2-
*Um número racional teve sua representação com vírgula borrada na segunda casa decimal, ficando assim 27,4*8 (o sinal * indica o dígito borrado). Pergunta-se que dígito devemos colocar no lugar do * para que resulte um número entre 27,48 e 27,5 ?*

Exercício 3-
Quantos são os números decimais entre 0,0 e 0,1 que têm a parte fracionária com exatamente dois dígitos em sua representação com vírgula?

Exercício 4- (vestibular)
Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique.
a).- Um irracional pode ter representação com vírgula periódica.

b).- Um racional somado com um irracional resulta num número racional.
c).- A divisão de dois irracionais sempre resulta em um racional.
d).- Subtraindo dois irracionais pode resultar num racional.

Exercício 5-
Para o número real dado por 2/10 + 7/4 + 0,15 , pede-se:
a).- expressar essa soma como uma fração irredutível.
b).- expressar essa soma como uma fração decimal.
c).- escrever a representação com vírgula dessa soma.

Exercício 6-
"Toda representação com vírgula de um número racional ou é finita, ou é infinita com uma lógica simples: é periódica, ao menos a partir de uma certa casa decimal. Por outro lado, os números irracionais sempre têm uma representação com vírgula que não pode ser completamente descrita; por exemplo, ninguém sabe quem é o dígito na $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000^a$ *casa decimal de* $\sqrt{2}$ *."*
Pede-se explicar o que há de errado nessa afirmação.

Exercício 7-
Dentre os números reais dados pelas frações 11/49, 50/63 e 7/12, quais têm representação com vírgula que pode ser obtida sem o método da divisão?
Dica: não sendo número decimal, precisamos usar divisão.

Exercícios didáticos (IV)

Exercício 1– (vestibular FGV)
Sendo x um número racional e y um irracional, é verdade que
a).- x y é irracional?
b).- x^2 *é irracional?*
c).- x + y é racional?
d).- x – y + $\sqrt{2}$ *é irracional?*
e).- x + 2y é irracional?

Exercício 2–
Verdadeiro ou falso? Justifique, talvez dando exemplo ou contraexemplo.
a).- se a *for irracional, então* a^2 *é irracional.*
b).- se a *for irracional, então* a^2 *pode ser irracional.*
c).- se a^2 *for irracional, então* a *é irracional.*
d).- se a^2 *for irracional, então* a *pode ser irracional.*

Exercício 3-
Sendo r=0,18888... e s=0,2222... , obtenha a representação com vírgula de r+s. Faça isso de duas maneiras: somando diretamente as representações, e também iniciando por determinar as representações em fração dos dois números dados.

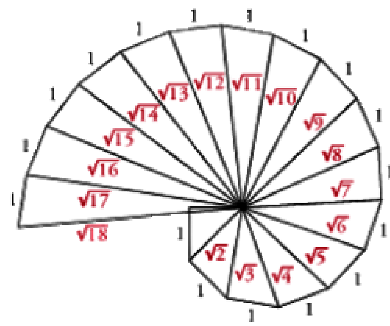
Exercício 4-
Sendo r=1,4444... e s=3,7777... , um aluno disse que a representação com vírgula da soma r+s é 5,21 , outro disse que é 5,221 e um outro disse que é 5,2222 …. com um dígito final 1 muito afastado. Pede-se comentar sobre a correção dessas respostas.

Exercício 5-
É verdade que, para qualquer número racional r, vale $2\,r < 3\,r$ *? Justifique sua resposta.*

Exercícios didáticos (V)

Exercício 1-
Modificando o raciocínio que usamos para provar a irracionalidade da raiz quadrada de 2, mostre que
a).- $\sqrt{3}$ *é irracional*
b).- $\sqrt{p}$ *é irracional, sempre que p for número primo*
c).- $\sqrt{6}$ *é irrracional, apesar de 6 não ser primo.*

Exercício 2-
A figura ao lado é o caramujo deTheodoros (matemático grego que viveu em c. 400 AC) e foi feita usando-se sucessivos triângulos retângulos, um cateto dos quais é unitário.
Pede-se apontar, justificando, quais das $\sqrt{n}$ *aí desenhadas são números irracionais.*



Treinamento olímpico

Pproblema 1-
Mostrar que o dígito da 1348^a *casa decimal da representação com vírgula de 12/13 é gual ao dígito da* 5428^a *casa.*

Problema 2-
Fixemos os dígitos 0, 1, 4, 5, 8, 9. Pede-se escrever oito números, cada um dos quais use exatamente cinco dos tais dígitos e isso de modo que, em cada número, nenhum dígito apareça mais de uma vez. Ademais, os oito números devem estar entre 18 e 19, e quatro deles devem estar mais próximos de 18 do que de 19.

Problema 3- (ORM/2011)
Considere o número real dado por 0,1123 5831 4... , onde cada dígito da parte fracionária, a partir do terceiro, é obtido somando os dois dígitos anteriores, ficando-se apenas com o dígito das unidades desta soma e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justif.
Resp.:
gerando mais dígitos para detectarmos algum padrão, obtemos:
0,**11**235831459437077415617853819099875279651673033695493257291**11**23583 ... ;
como ocorreu a repetição do par 11, os demais dígitos seguindo esta dupla automaticamente se repetirão também (23583...), até uma nova repetição da dupla 11, e assim por diante, logo o número dado é racional.

O problema também pode ser resolvido observando que o conjunto de todas as possíveis duplas ordenadas de dígitos, {00, 01, 02, ..., 10, 11, 12, ..., 97, 98, 99}, é finito e , como tal, obrigatoriamente terá de ocorrer uma repetição de duplas na geração dos *infinitos* dígitos do número em estudo.

Problema 4– (ORM/2008) (nível 2)
Sendo r *um número real não nulo, considere a soma* $r+\frac{1}{r}$. *Pede-se descobrir quando o valor de tal soma resulta num inteiro positivo*
a).- no caso particular de r inteiro;
b).- no caso particular de r racional;
c).- no caso particular de r irracional.

Dica:
indicando por s o valor da soma, o problema pede estudarmos a natureza de r em termos de s. Isso significa que devemos olhar r + 1/r = s, como uma equação na incógnita r e discutir o que ocorre com r sabendo que s é inteiro positivo. Logo, use Bhaskara para escrever r em termos de s e discuta o que ocorre.

Problema 5-
Sejam dois números reais que têm dízima periódica simples. Mostre que sua soma também tem esse tipo de representação.

Problema 6-
Sabemos que dizer que um número real tem uma representação com vírgula finita equivale a dizer que ele é um número decimal. Pede-se mostrar que a quantidade de dígitos de sua dízima é igual ao maior dos expoentes na fatoração em primos do denominador da fração irredutível que o representa.

Pproblema 7-
Seja o número racional r dado por $r = \dfrac{1+n^2}{n(n^2-1)}$ *, onde n é um inteiro* $\geqslant 2$.
a). Calcule r para n = 2, 3, 4 e mostre que nenhum desses r é um número decimal.
b). Mostre que r nunca é número decimal, qualquer que seja o valor de $n \geqslant 2$.
Dica.:
Observe que 3 é um fator primo do denominador; para isso, mostre que 3 divide $n(n^2-1)$, usando raciocínio de congruência mod 3. (Estude as possibilidades n = 0, 1, 2 mod 3.)